数理解析研究所講究録
612巻 1987年 67-77

微分代数におけるGröbner基底とその応用

徳島大・総合科学　高山　信毅（Nobuki Takayama）

0.

kを標数0の体、Kをk上の有理関数体$k(x_1,\cdots,x_n)$，Rを$K[\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$とする。微分作用素の和・積を考えることにより、$R$は(非可換)環となる。本稿では$R$を考察する。$\mathfrak{a}$を$R$の左idealとする。$L\in R$のとき、

問題1. $L\in\mathfrak{a}$かどうかを判定するアルゴリズムを求めよ。

多項式環に対しては、Knuth-Bendix completion により ideal の Gröbner 基底を構成し、Gröbner 基底による in-reduction でLを標準形へ書き換え、問題1を解くことができることがよく知られている(Buchberger [1])。Rに対しても同じ方法が適用できる。本稿の第一の目的はRに対する問題1の解を与えることである(c.f. Galligo [3]; [3]には$k[x_1,\cdots,x_n,\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$: Weyl Algebra での問題1の解が証明ぬきで示されている。R.I.M.S.での講演の後、理研の佐々木建昭氏に教えていただいた。)。

本稿の第二の目的は、そのアルゴリズムの、偏微分方程式系の代数的研究、その中でも特に、多変数特殊関数への応用

例を示すことである。

問題2. 多変数特殊関数 f の近接関係式を計算するアルゴリズムを求めよ。

近接関係式 (contiguous relation, recurrence relation) とは何か. を Gauß の超幾何関数について説明する。 Gauß の超幾何関数は次の形をしている。

$$f(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(1,m)(\gamma,m)}x^m \quad , \text{ここで } (\alpha,m)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1).$$

この f に対して次の関係式が成立する。

$$(0.1)\left\{\begin{array}{ll} H_\alpha f(\alpha,\beta,\gamma;x)=f(\alpha+1,\beta,\gamma;x) & ,\ H_\alpha=\frac{1}{\alpha}\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right) \\ B_{\alpha+1}f(\alpha+1,\beta,\gamma;x)=f(\alpha,\beta,\gamma;x) & ,\ B_\alpha=\frac{1}{\gamma-\alpha}\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}+(\gamma-\alpha-\beta x)\right\} \end{array}\right.$$

関係式 (0.1) は Gauß の超幾何関数のパラメータ α についての近接関係式とよばれている。多変数特殊関数 (Erdélyi [2] 5.7) に対するこのような関係式は部分的にしか知られておらず、これらを systematic に求めることが、Kimura [4] に problem ([4] 60p) として提出されている。本稿では問題1の一応用として問題2の解を与える。 例として、Appell の F_4 の α についての近接関係式を掲載する。これは新しく知られた公式である。

1. 記号及び定義.

$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\cdots\}$.

$a\in K$, $a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$ の形の項を R の単項式と呼ぶ。

$\mathrm{Exp}\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}\right):=(k_1,\cdots,k_n)\in(\mathbb{N}_0)^n$.

$$\mathrm{coeff}\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}\right) := a 。$$

$(\mathbb{N}_0)^n$ の順序 $>$ を次のように定義する。

$$(p_1,\cdots,p_n) > (q_1,\cdots,q_n) \iff$$

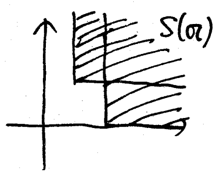
$(p_1+\cdots+p_n > q_1+\cdots+q_n)$ or $\big(p_1+\cdots+p_n = q_1+\cdots+q_n$ かつ $(p_1>q_1$ or $((p_1=q_1)$ かつ $((p_2,\cdots,p_n)>(q_2,\cdots,q_n)))))\big)$

i.e. $n=2$ なら $(0,0)<(0,1)<(1,0)<(0,2)<(1,1)<(2,0)<\cdots$ 。

$\mathrm{head}(L) :=$ 最も次数の高い L 中の単項式。 $(L\in R)$.

$\mathrm{tail}(L) := L - \mathrm{head}(L)$ 。

$\mathfrak{a}$ を R の左イデアルとするとき、



$$S(\mathfrak{a}) := \bigcup_{L\in\mathfrak{a}}\left\{\mathrm{Exp}(\mathrm{head}(L)) + (\mathbb{N}_0)^n\right\}$$

$S(\mathfrak{a})$ は $(\mathbb{N}_0)^n$ のモノイデアルとなる。

$U\subset\mathbb{C}^n$ domain, presheaf $U\mapsto\{f \mid f$ は U 上の正則関数, $\mathfrak{a}f=0\}$ より作った層を $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ と書き、$\mathfrak{a}$ の解空間の層とよぶ。

$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}(\mathfrak{a}) := \sup_{x_0\in\mathbb{C}^n}\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{x_0}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{N}_0\cup\{+\infty\}$ 。

$k^{(1)} \mid k^{(2)}$ $(k^{(1)},k^{(2)}\in(\mathbb{N}_0)^n) \underset{\mathrm{def.}}{\iff} \exists k\in(\mathbb{N}_0)^n$ s.t. $k^{(2)}=k^{(1)}+k$ 。

$N, L\in R$, $N=N^{(1)}+\cdots+N^{(p)}$ ($N^{(i)}$ は単項式) とする。

N が L により m-reducible $\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ $\exists i$ $\mathrm{Exp}(\mathrm{head}(L)) \mid \mathrm{Exp}(N^{(i)})$ 。

N が L で m-reducible とすれば、$\exists i$, $\mathrm{Exp}(\mathrm{head}(L)) \mid \mathrm{Exp}(N^{(i)})$ となる。

$\mathrm{head}(c\,\mathrm{head}(L)) = N^{(i)}$ となる R の単項式 c により、N を、$N-cL$ へ書き換える操作を、N の L による m-reduction という。(i.e. modulo L による N の書き換え)

N が L で m-irreducible $\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ N が L で m-reducible でない。

Prop1.1 FをRの元の有限集合とする。$L \in R$とするとき、LのFによる m-reductionは有限回で停止する。(つまり、Fでm-irreducibleとなる。)

定義1.1 ($L_1, L_2 \in R$ の S-operator: $Sp(L_1, L_2)$。)

$$Sp(L_1, L_2) := C_1 L_1 + C_2 L_2$$

ここで C_1, C_2は次の条件をみたすRの単項式で、下のeが$(N_0)^n$でもっとも小さいもの。

(イ) $e := Exp(head(C_1 head(L_1))) = Exp(head(C_2 head(L_2)))$

(ロ) $coeff(head(C_1 head(L_1))) + coeff(head(C_2 head(L_2))) = 0$.

(つまり、L_1, L_2にC_1, C_2をかけて、L_1, L_2の最高次の項を消したものが$Sp(L_1, L_2)$)

注. $Sp(L_1, L_2)$にはKに関する不定性があるが、これは以下の議論では問題とならない。

2. 問題1の解.

$L^{(1)}, \cdots, L^{(p)}$: Rの左ideal $\mathfrak{a}$のgeneratorとする。

アルゴリズム2.1 (Knuth-Bendix型アルゴリズム by Buchberger)

入力: $\{L^{(1)}, \cdots, L^{(p)}\}$

出力: F. (Gröbner Basis of $\mathfrak{a}$.)

$F := \{L^{(1)}, \cdots, L^{(p)}\}$;

$S := \phi$;

do { $F := F \cup S$; $S := \phi$;

Fの各要素をFについて m-irreducibleとする。0はFより除く。

Fの元の組み合わせ(p, q)すべてに関して以下をくり返す。{

$t := Sp(p, q)$; tをFに関してm-reductionし、m-irreducibleとする。

if $t \neq 0$ then $S := S \cup \{t\}$; }

} while $S \neq \phi$.

Prop 2.1 アルゴリズム2.1は、停止する。

略証: $(\mathbb{N}_0)^n$のモノイデアルはa.c.c. (assending chain condition)を満たすから。//

アルゴリズム2.1で生成されるFを$\mathfrak{a}$のGröbner Basisという。これは一意的には定まらない。Gröbner Basisについて、次の事実が成り立つ。Gを$\mathfrak{a}$のGröbner Basisとするとき、

Prop 2.2 $N \in \mathfrak{a}, N \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Exp}(\mathrm{head}(N)) \in \bigcup_{L \in G} \{\mathrm{Exp}(\mathrm{head}(L)) + (\mathbb{N}_0)^n\}$. すなわち、$S(\mathfrak{a}) = \bigcup_{L \in G} \{\mathrm{Exp}(\mathrm{head}(L)) + (\mathbb{N}_0)^n\}$。

Prop 2.2により、次のアルゴリズムが得られる。

アルゴリズム2.2 ($L \in \mathfrak{a}$の判定法, 問題1の解).

入力: G: $\mathfrak{a}$のGröbner Basis, $L \in R$.

出力: $L \in \mathfrak{a}$かどうかの答え。

while L が G に関して m-可約 do. {

$L :=$ L を G で m-reduction したもの }

if $L = 0$ then "yes" else "no".

3. 応用.

以下 $k = \mathbb{C}$ とする。

まず $\mathfrak{a}$ の解空間の次元を求める公式を示す。

Prop 3.1 $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(\mathfrak{a}) = \#\left((\mathbb{N}_0)^n \setminus S(\mathfrak{a})\right)$

略証: Cauchy-Kowalevski の定理、及び Cauchy の存在定理による。//

注. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(\mathfrak{a}) < +\infty$ のとき、$\mathfrak{a}$ の Gröbner Basis を計算すれば、$\mathfrak{a}$ を容易に Pfaff 方程式系へ書き換えることができる。$(\mathbb{N}_0)^n \setminus S(\mathfrak{a})$ の元を $\mathrm{Exp}(*)$ とする $*$ が Pfaff eq の base となる。

さて、次に問題２の解を与える。

多変数特殊関数やそれに対する Horn の表については、[2] 5.7 を参照。

(イ) $\mathfrak{a}_\lambda$: パラメータ λ を含む左イデアル（特殊関数を定義している）

(ロ) $f_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$: $\mathfrak{a}_\lambda f_\lambda = 0$, $f_\lambda(0, \cdots, 0) = 1$ となる関数（f_λ が多変数特殊関数）

(ハ) $H_\lambda \in R$. s.t. $f_{\lambda+1} = H_\lambda f_\lambda \neq 0$ （この H_λ を上昇演算子と呼ぶ）

(イ)(ロ)(ハ) が与えられているとする。

lemma 3.1 (Key lemma)

$\mathfrak{a}_\lambda$ と H_λ で生成される左イデアルが R に一致すれば、

$\exists B_{\lambda+1} \in R.$ s.t. $B_{\lambda+1} f_{\lambda+1} = f_\lambda$. (この$B_{\lambda+1}$を下降演算子と呼ぶ)

注. $\mathfrak{a}_\lambda$がRの左極大イデアルであれば、lemmaの仮定が成立する。

㊟ $g^{(i)}$を$\mathfrak{a}_\lambda$のgeneratorとする。仮定より.

$$\exists C^{(i)}, C \in R. \quad \sum C^{(i)} g^{(i)} + C H_\lambda = 1. \qquad (3.1)$$

$$\therefore \sum C^{(i)} \underbrace{g^{(i)} f_\lambda}_{=0} + C \underbrace{H_\lambda f_\lambda}_{= f_{\lambda+1}} = f_\lambda \qquad \therefore B_{\lambda+1} := C \text{ でよい}$$

注. $\mathfrak{a}_\lambda$のgeneratorとH_λから出発して、アルゴリズム2.1を適用すると、有限回のくりかえしで、アルゴリズム2.1におけるFの元として1があらわれる。これを逆にたどることにより(3.1)の解が求まる。

lemma 3.2

$\mathfrak{a}_{\lambda+1}$がRの左極大イデアル ⇒ $B_{\lambda+1}$はmodulo $\mathfrak{a}_{\lambda+1}$で一意的。

(i.e. $B_{\lambda+1} f_{\lambda+1} = f_\lambda$をみたす$B_{\lambda+1}$はmodulo $\mathfrak{a}_{\lambda+1}$で一意的).

注. 左極大という仮定は、特殊関数を定義しているRのイデアルに対しては、普通の仮定である。(特殊関数の定義がないからこれはいいかげんな説明だが....) 次の事実が成り立つ。

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}(\mathfrak{a}) < +\infty$, $\mathfrak{a}$が確定特異点型とする。このとき、

解$\mathcal{S}(\mathfrak{a})$のモノドロミ表現がirreducible ⇒ $\mathfrak{a}$は左極大イデアル。

注. lemma 3.1は、B_λを与えて$H_{\lambda-1}$を求めるという形でも成立する。

定理3.1

Hornの表の中の34個の2変数超幾何関数のすべてのパラメータ($\alpha,\alpha',\beta,\beta',\cdots$)に関して、近接関係式が計算可能。

略証. λをパラメータとするとき、H_λかB_λどちらかがもとまればlemma 3.1を適用できる(仮定がみたされることのチェックも必要)。しかし、B_λかH_λどちらかは必らず簡単な形、

$$\frac{1}{c}\left(px\frac{\partial}{\partial x}+qy\frac{\partial}{\partial y}+c\right) \qquad p,q\in\mathbb{Z},\ c\text{は}\lambda\text{に依存する数},$$

をしており、具体的に求まる。lemma 3.1の仮定も必らずみたされている。//

注. 一変数特殊関数、Laurinciellaのn変数超幾何関数、その他に対しても上の定理は成り立つが、詳しくは説明しない。

定理3.1にしたがうと、近接関係式を計算するアルゴリズムは次のようになる。

アルゴリズム3.1

入力: 多変数特殊関数を定義する$\mathfrak{a}_\lambda$の生成元, H_λ (またはB_λ)

出力: $B_{\lambda+1}$ (または$H_{\lambda-1}$)

begin.

$\mathfrak{a}_\lambda$のGröbner Basis $G_\lambda=\{L^{(1)},\cdots,L^{(m)}\}$をもとめる。

$\sum C^{(i)}L^{(i)}+CH_\lambda=1$ となる $C^{(i)},C$ をもとめる。

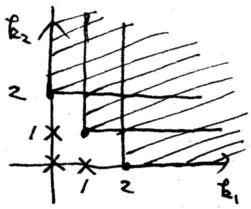
$B_{\lambda+1}$:= Cを$G_{\lambda+1}$についてm-reductionしたもの。

end.

4. 実例.

例1.
$$\begin{cases} L_1 = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\gamma-1)\frac{\partial}{\partial x} - \beta \\ L_2 = y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\gamma-y)\frac{\partial}{\partial y} - \beta' \end{cases}$$

L_1, L_2で生成されるR（ここではn=2）のイデアルを$\mathfrak{a}$とする。$\mathfrak{a}$のGröbner-Basisは、



$$x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y\beta' - (\gamma-x)(x-y)}{x-y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\beta y}{x-y}\frac{\partial}{\partial y} - \beta$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{x\beta - (\gamma-y)(x-y)}{x-y}\frac{\partial}{\partial y} - \beta'.$$

例2.（Appell の F_4）

$$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y) := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,m+n)\,(\beta,m+n)}{(1,m)(1,n)(\gamma,m)(\gamma',n)}\, x^m y^n \quad (\text{Appell's } F_4).$$

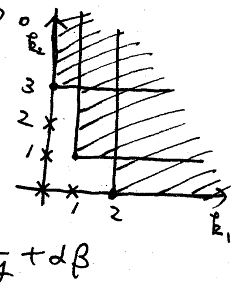
$k := \mathbb{C}(\beta,\gamma,\gamma')$, $R := k(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right]$ とおく。

$$\begin{cases} L^{(1)}_\alpha := \delta_x(\delta_x+\gamma-1) - x(\delta_x+\delta_y+\alpha)(\delta_x+\delta_y+\beta) \\ L^{(2)}_\alpha := \delta_y(\delta_y+\gamma'-1) - y(\delta_x+\delta_y+\alpha)(\delta_x+\delta_y+\beta). \end{cases} \quad , \delta_x = x\frac{\partial}{\partial x},\ \delta_y = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

$\mathfrak{a}_\alpha$ を $L^{(1)}_\alpha, L^{(2)}_\alpha$ で生成される R の左イデアルとする。

$\mathfrak{a}_\alpha f_\alpha \equiv 0$ （$f_\alpha(x,y) := F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma';x,y)$ とおく。）が成り立つ。

$H_\alpha := \frac{1}{\alpha}(\delta_x+\delta_y+\alpha)$ とおくと、 $H_\alpha f_\alpha = f_{\alpha+1}$ が成り立つ。



$\mathfrak{a}_\alpha$ の Gröbner Basis は次の3つの元からなる。

$$l^{(1)}_\alpha = x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma'\frac{\partial}{\partial y}.$$
$$l^{(2)}_\alpha = 2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (y^2 - y(1-x))\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\alpha+\beta+1-\gamma)x\frac{\partial}{\partial x} + ((\alpha+\beta+1)y - \gamma'(1-x))\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\beta$$
$$l^{(3)}_\alpha = 2y^2(x^2-2xy-2x+y^2-2y+1)\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \text{低次項}.$$

アルゴリズム3.1を適用して $B_{\alpha+1}$ を得る。（結果は次ページ）

$$B_{\alpha+1} = \frac{1}{c}\left(c_0 + c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial y} + c_3\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

where

$$c = -2(-\alpha + \gamma' - 1)(-\alpha + \gamma + \gamma' - 2)(-\alpha + \gamma - 1)$$

$$c_0 = 2\alpha^3 + 4\alpha^2\beta x + 4\alpha^2\beta y - 2\alpha^2\beta - 4\alpha^2\gamma - 4\alpha^2\gamma' + 8\alpha^2 - 3\alpha\beta\gamma x - 5\alpha\beta\gamma y + \alpha\beta\gamma - 5\alpha\beta\gamma' x - 3\alpha\beta\gamma' y + \alpha\beta\gamma' + 10\alpha\beta x + 10\alpha\beta y - 4\alpha\beta + 2\alpha\gamma^2 + 6\alpha\gamma\gamma' - 10\alpha\gamma + 2\alpha\gamma'^2 - 10\alpha\gamma' + 10\alpha + 2\beta\gamma^2 y + 2\beta\gamma\gamma' x + 2\beta\gamma\gamma' y - 3\beta\gamma x - 7\beta\gamma y + \beta\gamma + 2\beta\gamma'^2 x - 7\beta\gamma' x - 3\beta\gamma' y + \beta\gamma' + 6\beta x + 6\beta y - 2\beta - 2\gamma^2\gamma' + 2\gamma^2 - 2\gamma\gamma'^2 + 8\gamma\gamma' - 6\gamma + 2\gamma'^2 - 6\gamma' + 4$$

$$c_1 = x(4\alpha^2 x + 4\alpha^2 y - 4\alpha^2 + 2\alpha\beta x - 2\alpha\beta y - 2\alpha\beta - 5\alpha\gamma x - 3\alpha\gamma y + 5\alpha\gamma - 5\alpha\gamma' x - 3\alpha\gamma' y + 5\alpha\gamma' + 12\alpha x + 8\alpha y - 12\alpha - \beta\gamma x + \beta\gamma y + \beta\gamma - \beta\gamma' x + \beta\gamma' y + \beta\gamma' + 2\beta x - 2\beta y - 2\beta + \gamma^2 x + \gamma^2 y - \gamma^2 + 3\gamma\gamma' x + \gamma\gamma' y - 3\gamma\gamma' - 6\gamma x - 4\gamma y + 6\gamma + 2\gamma'^2 x - 2\gamma'^2 - 8\gamma' x - 2\gamma' y + 8\gamma' + 8x + 4y - 8)$$

$$c_2 = 4\alpha^2 xy + 4\alpha^2 y^2 - 4\alpha^2 y - 2\alpha\beta xy + 2\alpha\beta y^2 - 2\alpha\beta y - 3\alpha\gamma xy - 5\alpha\gamma y^2 + 5\alpha\gamma y + 2\alpha\gamma' x^2 - 7\alpha\gamma' xy - 4\alpha\gamma' x - 3\alpha\gamma' y^2 + \alpha\gamma' y + 2\alpha\gamma' + 8\alpha xy + 12\alpha y^2 - 12\alpha y + \beta\gamma xy - \beta\gamma y^2 + \beta\gamma y + \beta\gamma' xy - \beta\gamma' y^2 + \beta\gamma' y - 2\beta xy + 2\beta y^2 - 2\beta y + 2\gamma^2 y^2 - 2\gamma^2 y - \gamma\gamma' x^2 + 3\gamma\gamma' xy + 2\gamma\gamma' x + 2\gamma\gamma' y^2 - \gamma\gamma' y - \gamma\gamma' - 2\gamma xy - 8\gamma y^2 + 8\gamma y - \gamma'^2 x^2 + 3\gamma'^2 xy + 2\gamma'^2 x + \gamma'^2 y - \gamma'^2 + 2\gamma' x^2 - 8\gamma' xy - 4\gamma' x - 4\gamma' y^2 + 2\gamma' y + 2\gamma' + 4xy + 8y^2 - 8y$$

$$c_3 = 3(2\alpha - \gamma - \gamma' + 2)y(x^2 - 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1)$$

なお、前ページの式は、REDUCEの計算結果をstream editorで加工しTEXのプログラムを生成し、TEXで出力したものである。X-windowのTEXプレビューを利用すれば、対話型処理をしている時も、この手で見やすい式を画面上に得ることができる。

参考文献

[1] B. Buchberger and R. Loos, Algebraic Simplification. Computing, Suppl. 4, 11-43 (1982).

[2] A. Erdélyi et al. Higher transcendental functions. MacGraw-Hill 1953.

[3] A. Galligo. Some algorithmic questions on ideals of differential operators.

[4] T. Kimura. Hypergeometric functions of two variables. Seminar Note Series of Univ. of Tokyo 1972.